WEST UNIVERSITY OF TIMIŞOARA
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF EVOLUTION EQUATIONS AND APPLICATIONS IN CONTROL THEORY

Habilitation Thesis

Author: ADINA LUMINIŢA SASU

2013

Table of contents

Abstract

The aim of this thesis is to present the author's main contributions concerning the asymptotic properties of evolution equations and their applications in control theory. The thesis is divided into three chapters which correspond to three major research directions: integral equations and asymptotic behavior of evolution families on the real line, asymptotic properties of discrete-time systems and applications to evolution families on the real line and applications of the asymptotic theory of evolution equations to robustness and control problems.

The first chapter is devoted to the study of the asymptotic behavior of evolution families on the real line. In section 1.2 we present the basic notions and we establish some preliminary properties. In section 1.3 we introduce two general classes of function spaces $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ and $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. We define an admissibility concept relative to an integral equation such that the input space belongs to $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ and the output space belongs to $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. Assuming that a pair of two function spaces is admissible, we obtain that the associated input-output operator is bounded. In section 1.4 we prove the uniqueness of the families of projections for exponential dichotomy on the real line and we deduce criteria for exponential dichotomy using the admissibility of L^p-spaces and specific methods, which are motivated by illustrative examples.

In section 1.5 we study the ordinary dichotomy: we prove the closure of the stable subspaces and the uniform stability, next the closure of the unstable subspaces and the uniform expansiveness. We show that the admissibility of any pair of function spaces such that the input space belongs to $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ and the output space belongs to $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ implies the existence of the ordinary dichotomy. In section 1.6 we determine the structures of the admissible function spaces for exponential dichotomy. The central result provides a complete and unified description of the classes of function spaces that can be used in the study of the exponential dichotomy on the real line by means of integral admissibility. Finally, we present some applications to the study of the exponential dichotomy of semigroups.

The second part of the chapter is focused on the study of the exponential trichotomy of evolution families. In section 1.7 we deduce the structure of the families of projections for exponential trichotomy on the real line. In section 1.8 we introduce the concept of p-admissibility for the pair $(C_b(\mathbb{R}, X),\, C_c(\mathbb{R}, X))$ and we prove in several steps that the p-admissibility of the pair $(C_b(\mathbb{R}, X), C_c(\mathbb{R}, X))$ is a sufficient condition for the exponential trichotomy. In section 1.9, assuming that an evolution family admits an exponential trichotomy, we obtain the structure of the solutions of the associated integral equation. After that, we present the first characterization in

the literature for the existence of the exponential trichotomy on the real line, i.e. we show that an evolution family is exponentially trichotomic if and only if there exists $p \in (1, \infty)$ such that the pair $(C_b(\mathbb{R}, X), C_c(\mathbb{R}, X))$ is p-admissible for the associated integral equation.

In Chapter 2 we study the asymptotic properties of discrete-time systems defined on the real line, in the most general case, without any assumption on the coefficients. We start with some preliminary properties of dichotomy and trichotomy, definitions of the associated fundamental subspaces and their invariance properties. In section 2.3 we consider two sequence spaces I and O, which are invariant under translations on $\mathbb{Z}$, and we introduce the admissibility of the pair $(O(\mathbb{Z}, X), I(\mathbb{Z}, X))$ which consists in the unique solvability of a discrete control system between $I(\mathbb{Z}, X)$ and $O(\mathbb{Z}, X)$. Using a special classification of the input and output spaces, we deduce that the admissibility implies the existence of the exponential dichotomy. We show that in certain conditions the converse implication holds for uniformly bounded systems. The hypotheses are motivated by examples, which also prove that the proposed method is the most general in this framework.

In section 2.4, using some translated input-output systems, we establish the connections between the dichotomy of evolution families on the real line and the dichotomy of the associated discrete evolution families. As a consequence, we obtain a complete resolution concerning the discrete admissibility properties that can provide the existence of the exponential dichotomy of evolution families on the real line.

In section 2.5 we introduce a new admissibility concept for the pair $(\ell^p(\mathbb{Z}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$ with respect to a control system, where $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ denotes the space of the sequences with finite support. In several main steps, we prove that all the properties that describe the exponential trichotomy are implied by the admissibility of the pair $(\ell^p(\mathbb{Z}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$. In section 2.6 we study whether the converse implication holds. First we deduce the representations of the control system solutions using the projections for exponential trichotomy. After that, we prove that a discrete-time system is exponentially trichotomic if and only if the pair $(\ell^p(\mathbb{Z}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$ is admissible for the associated control system. We complete the study with a new application to the case of evolution families on the real line.

In Chapter 3 we expose several applications of the asymptotic properties of evolution equations in control theory. In section 3.2 we study the robustness of the exponential stability of discrete-time systems in the presence of multi-feedback structured perturbations, employing input-output techniques. Section 3.3 is devoted to the connections between the stabilizability and the detectability of a control system and the exponential stability of the initial discrete-time system.

In section 3.4 we give answers regarding the connections between stabilizability and controllability for discrete dynamical systems in infinite dimensional spaces. We start with the nonautonomous case, the hypotheses being motivated by illustrative examples.

Next, we study the case of variational discrete systems and we show that in certain conditions complete stabilizability implies exact controllability. The main hypotheses and the fact that the converse implication is not true are illustrated by examples.

In section 3.5 we study the robustness of the exponential dichotomy of nonautonomous discrete-time systems. We deduce a lower bound for the dichotomy radius using the norms of certain operators that act on translations invariant sequence spaces.

In section 3.6 we consider variational control systems described by integral models and we obtain an estimation for the stability radius in terms of some associated Perron operators. We present a general method that can be extended to other classes of dynamical systems and also to other asymptotic properties.

Rezumat

Scopul acestei teze este de a prezenta principalele contribuţii ale autoarei privind comportările asimptotice ale ecuaţiilor de evoluţie şi aplicaţiile acestora în teoria controlului. Teza este organizată pe trei capitole care corespund unor direcţii majore de studiu: ecuaţii integrale şi comportări asimptotice ale familiilor de evoluţie pe axa reală, proprietăţi asimptotice ale sistemelor discrete şi aplicaţii pentru familii de evoluţie definite pe axa reală, respectiv aplicaţii ale teoriei asimptotice a ecuaţiilor de evoluţie în probleme de robusteţe şi control.

Primul capitol este dedicat studiului comportărilor asimptotice ale familiilor de evoluţie pe axa reală. În secţiunea 1.2 se prezintă conceptele de bază şi se stabilesc proprietăţi preliminare. În secţiunea 1.3 se introduc două clase generale de spaţii de funcţii $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. Definim un concept de admisibilitate relativ la o ecuaţie integrală astfel încât spaţiul de intrare este din $\mathcal{T}(\mathbb{R})$, iar spaţiul de ieşire din $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. Presupunând că o pereche de spaţii de funcţii este admisibilă obţinem că operatorul de intrare-ieşire asociat este mărginit. În secţiunea 1.4 demonstrăm unicitatea familiei de proiectori pentru dichotomia pe axa reală şi deducem criterii pentru dichotomia exponenţială utilizând admisibilitatea unor spaţii L^p şi metode specifice spaţiilor L^p, motivate de exemple ilustrative.

În secţiunea 1.5 studiem dichotomia ordinară: demonstrăm închiderea subspaţiilor stabile şi stabilitatea uniformă, închiderea subspaţiilor instabile şi expansivitatea uniformă. Arătăm că admisibilitatea oricărei perechi de spaţii de funcţii cu spaţiul de intrare din clasa $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ şi spaţiul de ieşire din $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ implică existenţa dichotomiei ordinare. În secţiunea 1.6 determinăm structurile spaţiilor de funcţii admisibile pentru dichotomia exponenţială. Rezultatul central prezintă o descriere completă şi unitară a claselor de spaţii de funcţii care pot fi utilizate în studiul dichotomiei exponenţiale pe axa reală prin intermediul admisibilităţii integrale. În final, sunt prezentate aplicaţii pentru studiul dichotomiei semigrupurilor.

A doua parte a capitolului este focusată pe studiul trichotomiei exponenţiale a familiilor de evoluţie. În secţiunea 1.7 deducem structura familiilor de proiectori pentru trichotomia exponenţială pe axa reală. În secţiunea 1.8 introducem conceptul de p-admisibilitate pentru perechea $(C_b(\mathbb{R}, X),\ C_c(\mathbb{R}, X))$ şi demonstrăm în câteva etape că p-admisibilitatea perechii $(C_b(\mathbb{R}, X),\ C_c(\mathbb{R}, X))$ este o condiţie suficientă pentru trichotomia exponenţială. În secţiunea 1.9, presupunând că o familie de evoluţie este exponenţial trichotomică, obţinem structura soluţiilor ecuaţiei integrale asociate. Apoi, prezentăm prima caracterizare din literatură pentru existenţa trichotomiei exponenţiale pe axa reală, adică arătăm că o familie de evoluţie este exponenţial trichotomică dacă

şi numai dacă există $p \in (1, \infty)$ astfel încât perechea $(C_b(\mathbb{R}, X), C_c(\mathbb{R}, X)$ să fie p-admisibilă pentru ecuaţia integrală asociată.

În Capitolul 2 studiem proprietăţile asimptotice ale sistemelor discrete definite pe axa reală, în cel mai general caz, fără nici o presupunere asupra coeficienţilor. În debut sunt prezentate proprietăţi preliminare de dichotomie şi trichotomie, definiţiile subspaţiilor fundamentale asociate şi proprietăţi de invarianţă. În secţiunea 2.3 considerăm două spaţii de şiruri I şi O, invariante la translaţii pe $\mathbb{Z}$, şi definim admisibilitatea perechii $(O(\mathbb{Z}, X), I(\mathbb{Z}, X))$, care constă în unica solvabilitate a unui sistem discret cu control între $I(\mathbb{Z}, X)$ şi $O(\mathbb{Z}, X)$. Utilizând o anumită clasificare a spaţiilor de intrare şi de ieşire, deducem că admisibilitatea implică existenţa dichotomiei exponenţiale. Arătăm că în anumite condiţii implicaţia reciprocă are loc, în cazul sistemelor uniform mărginite. Toate ipotezele de lucru sunt motivate prin exemple, care demonstrează că metoda propusă este cea mai generală în acest context.

În secţiunea 2.4, utilizând sisteme intrare-ieşire translatate, stabilim conexiunile dintre dichotomia familiilor de evoluţie pe axa reală şi dichotomia familiilor de evoluţie discrete asociate. Ca o consecinţă, obţinem o rezoluţie completă privind proprietăţile de admisibilitate discretă care pot asigura existenţa dichotomiei exponenţiale a familiilor de evoluţie pe axa reală.

În secţiunea 2.5 se introduce un nou concept de admisibilitate pentru perechea $(\ell^p(\mathbb{Z}, X),\ \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$ în raport cu un sistem cu control, unde $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ este spaţiul şirurilor cu suport finit. În câteva etape se demonstrează că toate proprietăţile care descriu trichotomia sunt implicate de admisibilitatea perechii $(\ell^p(\mathbb{Z}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$. În secţiunea 2.6 studiem dacă are loc şi implicaţia reciprocă. Mai întâi deducem reprezentările soluţiilor sistemului cu control utilizând proiectorii de trichotomie exponenţială. Apoi, demonstrăm că un sistem discret este exponenţial trichotomic dacă şi numai dacă perechea $(\ell^p(\mathbb{Z}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$ este admisibilă pentru sistemul cu control asociat. Studiul se încheie cu o nouă aplicaţie pentru cazul familiilor de evoluţie pe axa reală.

În Capitolul 3 sunt expuse câteva aplicaţii ale proprietăţilor asimptotice ale ecuaţiilor de evoluţie în teoria controlului. În secţiunea 3.2 studiem robusteţea stabilităţii exponenţiale a sistemelor discrete în prezenţa perturbărilor structurate de tip multi-feedback, utilizând tehnici de tip intrare-ieşire. Secţiunea 3.3 este dedicată conexiunilor dintre stabilizabilitatea şi detectabilitatea unui sistem cu control şi stabilitatea exponenţială a sistemului discret iniţial.

În secţiunea 3.4 formulăm răspunsuri privind conexiunile dintre stabilizabilitatea şi controlabilitatea sistemelor dinamice discrete în spaţii infinit-dimensionale. Studiul debutează cu cazul neautonom, ipotezele fiind motivate de exemple ilustrative. Apoi studiem cazul variaţional discret, în care arătăm că în anumite condiţii stabilizabilitatea completă implică exact controlabilitatea. Atât ipotezele considerate, cât şi faptul că implicaţia reciprocă nu are loc, sunt argumentate prin exemple.

În secţiunea 3.5 studiem robusteţea dichotomiei exponenţiale a sistemelor neautonome discrete. Se deduce o margine inferioară pentru raza de dichotomie, utilizând normele unor operatori care acţionează pe spaţii de şiruri invariante la translaţii.

În secţiunea 3.6 considerăm sisteme variaţionale cu control descrise de modele integrale şi obţinem o estimare pentru raza de stabilitate, în limbaj de operatori Perron asociaţi. Se prezintă o metodă generală, care poate fi extinsă atât la alte clase de sisteme dinamice cât şi pentru alte proprietăţi asimptotice.